

Birch-Marshall および Tucker による X 線スペクトル推定式について

医用放射線技術学研究室 加藤秀起

はじめに

診断領域 X 線スペクトルを推定する近似計算式は、現在 Birch-Marshall によるものと Tucker によるものが主に使用されている。両者のスペクトルの違い、およびスペクトルから導出される物理量の差異がどの程度なのか調査した。

Birch-Marshall による X 線スペクトル計算式¹⁾ を次式に示す。

$$I_\nu = k \int_{T_0}^{T_\nu} \left(1 + \frac{T}{m_0 c^2} \right) Q \left(\frac{dT}{dx} \right)^{-1} \exp \left(\frac{-\mu_\nu (T_0^2 - T^2)}{\rho C} \cot \theta \right) dT$$

ここで

I_ν : 振動数 ν の X 線光子数とその光子エネルギー $h\nu$ の積

k : 比例定数

ρ : ターゲット物質の密度

T_0 : 電子の初期エネルギー

T_ν : 発生光子エネルギーに等しい電子エネルギー

$m_0 c^2$: 電子の静止エネルギー

Q : differential energy intensity

dT/dx : relativistic stopping power

μ_ν : ターゲット物質の振動数 ν の光子に対する数線減弱係数

C : Thomas-Whiddington 定数

θ : ターゲット角度

Tucker による X 線スペクトル計算式²⁾ を次式に示す。

$$\Psi(E) = k \int_E^{E_m} \left(1 + \frac{m_0 c^2}{T} \right) B \left(\frac{1}{\rho} \frac{dT}{dx} \right)^{-1} \exp \left(\frac{-\mu(E)}{\rho C} \cdot \frac{(E_m^2 - T^2)}{\sin \theta} \right) dT$$

ここで

$\Psi(E)$: エネルギー E の光子数とその光子エネルギーの積

B : ターゲット物質の原子番号と T の関数で表される緩やかに変化する係数であり、

電子の運動エネルギー T と、電子 1 個あたりに放出される X 線光子数に比例する。

E_m : 電子の初期運動エネルギー

$\mu(E)$: ターゲット物質のエネルギー E の光子に対する数線減弱係数

その他の因子は、Birch-Marshall 式と同じである。

1. Birch 式, Tucker 式による X 線スペクトル形状の比較

照射設定条件

ターゲット角度 : 12 度

高電圧整流方式 : 定電圧

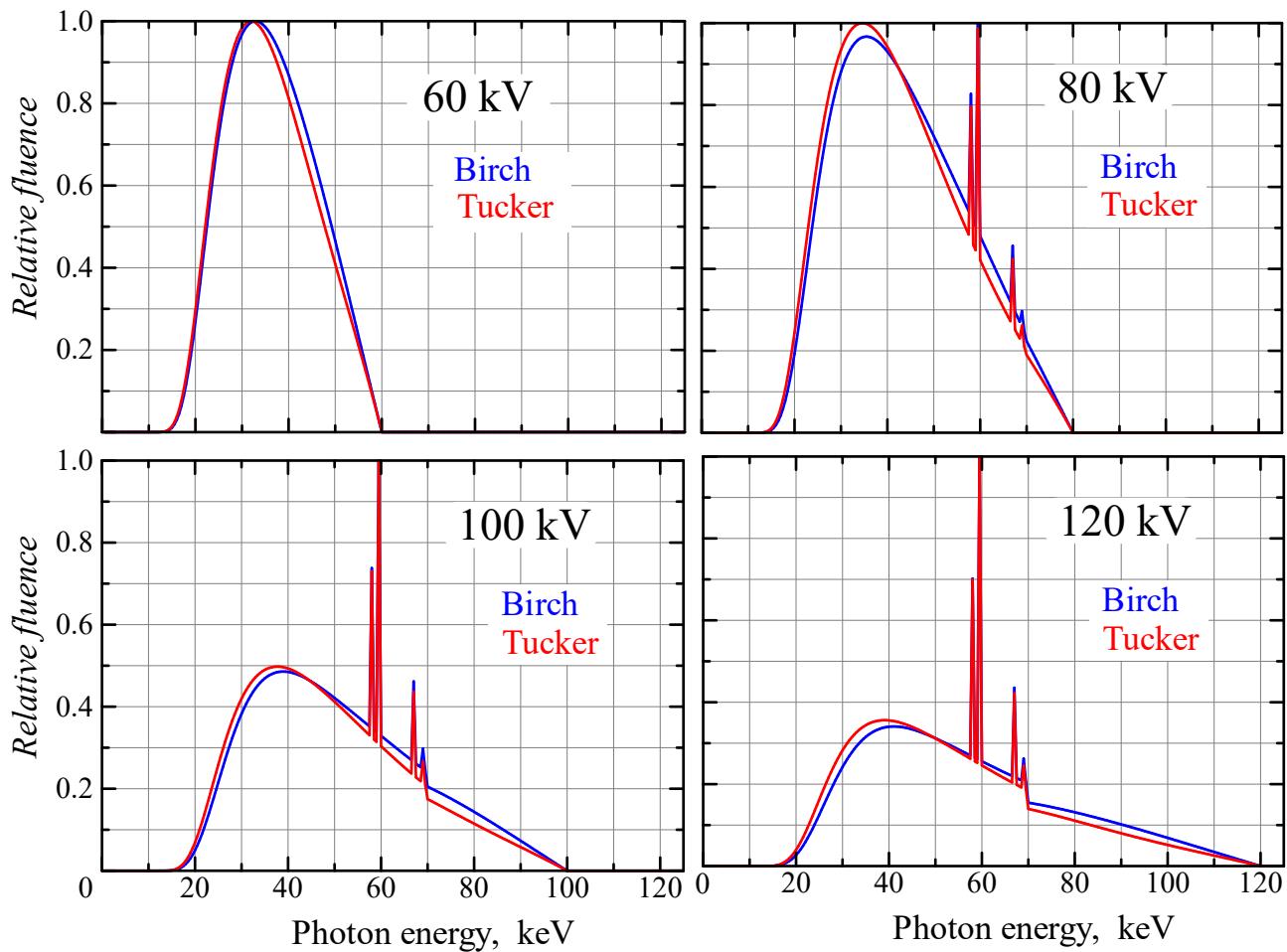
管電圧 : 60 kV, 総ろ過 : 2.5 mm Al 当量

管電圧 : 80 kV, 総ろ過 : 2.5 mm Al 当量

管電圧 : 100 kV, 総ろ過 : 3.0 mm Al 当量

管電圧 : 120 kV, 総ろ過 : 3.0 mm Al 当量

結果を下図に示す。



Tucker 式に比べて Birch 式の方がスペクトル全体に高エネルギー側へシフトしているのが確認できる。

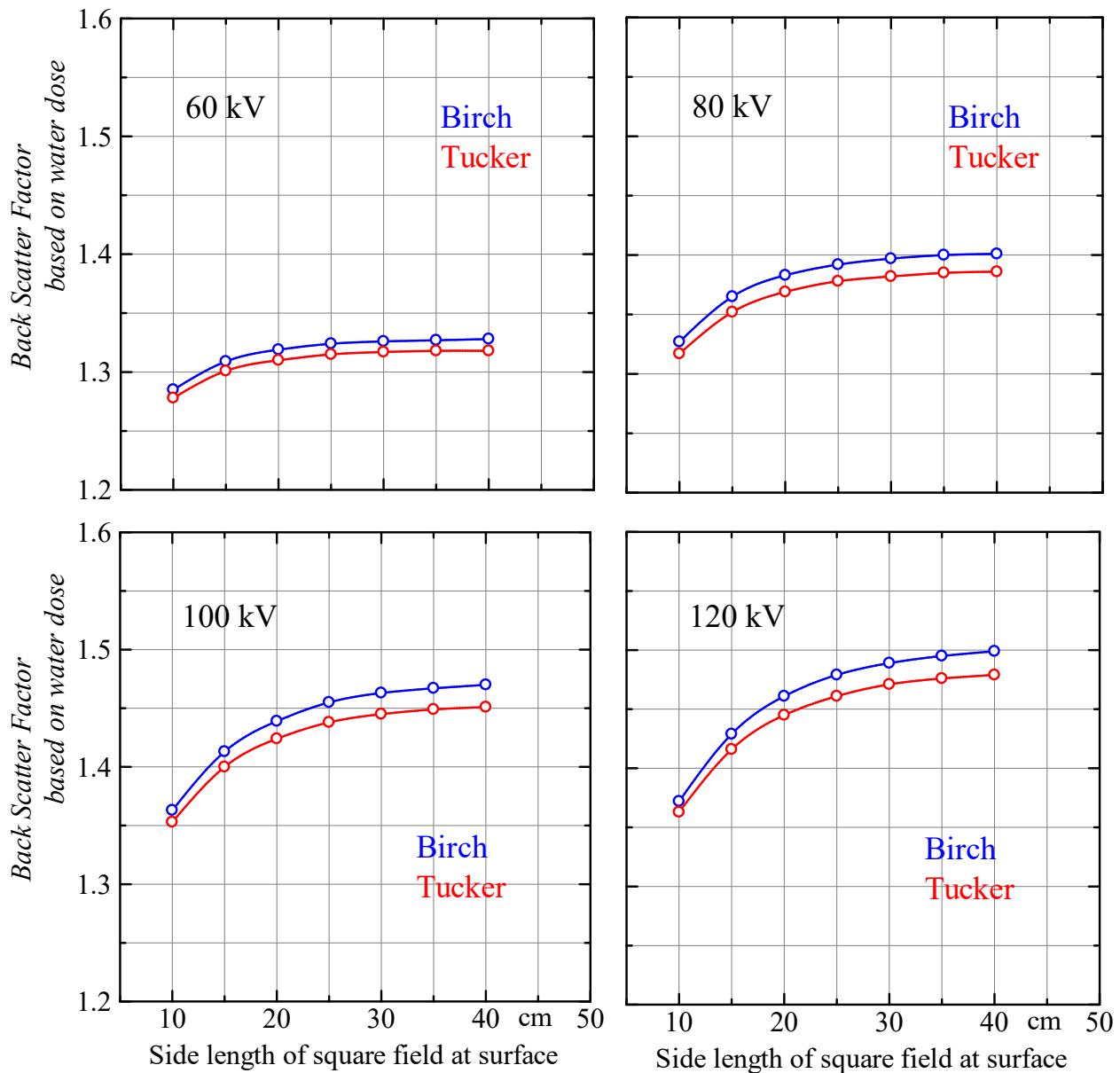
2. Birch 式、Tucker 式による X 線スペクトルを基に計算した後方散乱係数の比較

幾何学的な設定 : FSD = 80 cm, FID = 100 cm, Field Size at Surface

微分後方散乱係数法³⁾により後方散乱係数を計算した。

後方散乱係数は水散乱体、水吸収線量に基づくものである。

結果を下図に示す。



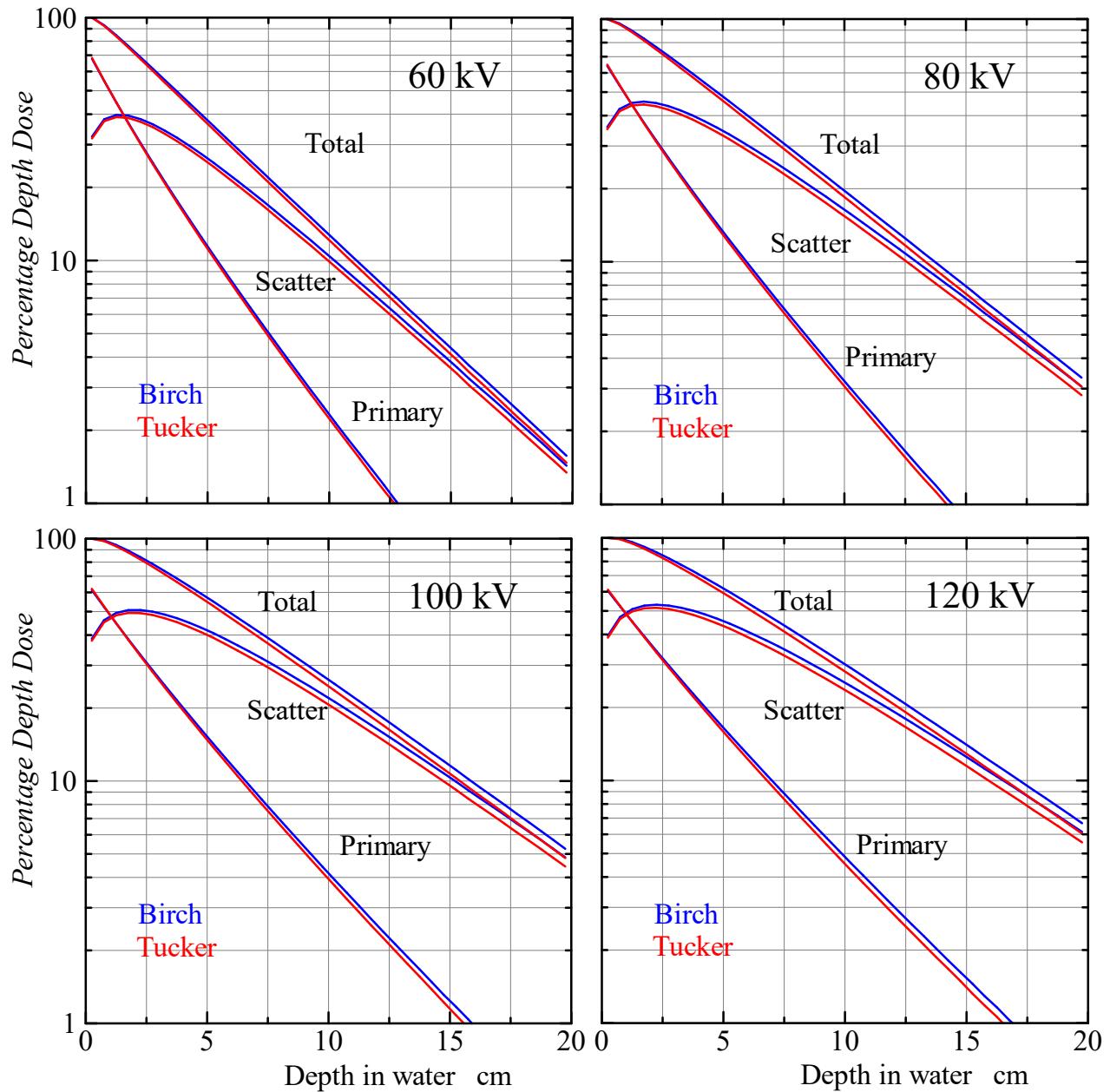
いずれの管電圧においても、Birch 式によるスペクトルから計算した後方散乱係数の方が Tucker 式から導出した値より最大 1.3%ほど大きくなる傾向が見られる。

3. Birch 式、Tucker 式による X 線スペクトルから計算される深部線量百分率の比較

設定条件 FSD = 80 cm, FID = 100 cm, Field size = 30×30 cm at FID

計算方法は文献⁴⁾ 参照

結果を下図に示す。



いずれの管電圧においても、Birch 式の方が Tucker 式で算出した PDD より大きくなる傾向が見られる。

4. Birch 式、Tucker 式による X 線スペクトルから計算されるフルエンスの比較

Birch 式および Tucker 式で算出した X 線スペクトルを基に、線源から一定距離の自由空間における単位照射線量当たりのフルエンス（光子数）を計算し比較した。

結果を下表に示す。

	60 kV	80 kV	100 kV	120 kV
Birch	5.185×10^{11}	6.409×10^{11}	7.553×10^{11}	8.032×10^{11}
Tucker	5.010×10^{11}	6.110×10^{11}	7.189×10^{11}	7.640×10^{11}

単位は $\text{mm}^{-2}/(\text{C/kg})$

いずれの管電圧においても、Birch 式の方が Tucker 式で算出した値より数% 大きくなる。

5. Birch 式、Tucker 式による X 線スペクトルから計算される照射線量-水吸収線量変換係数の比較

Birch 式および Tucker 式で算出した X 線スペクトルから、照射線量-水吸収線量変換係数を計算し比較した。結果を下表に示す。

	60 kV	80 kV	100 kV	120 kV
Birch	34.59	34.76	35.01	35.24
Tucker	34.59	34.73	34.95	35.14

単位は $\text{Gy}/(\text{C/kg})$

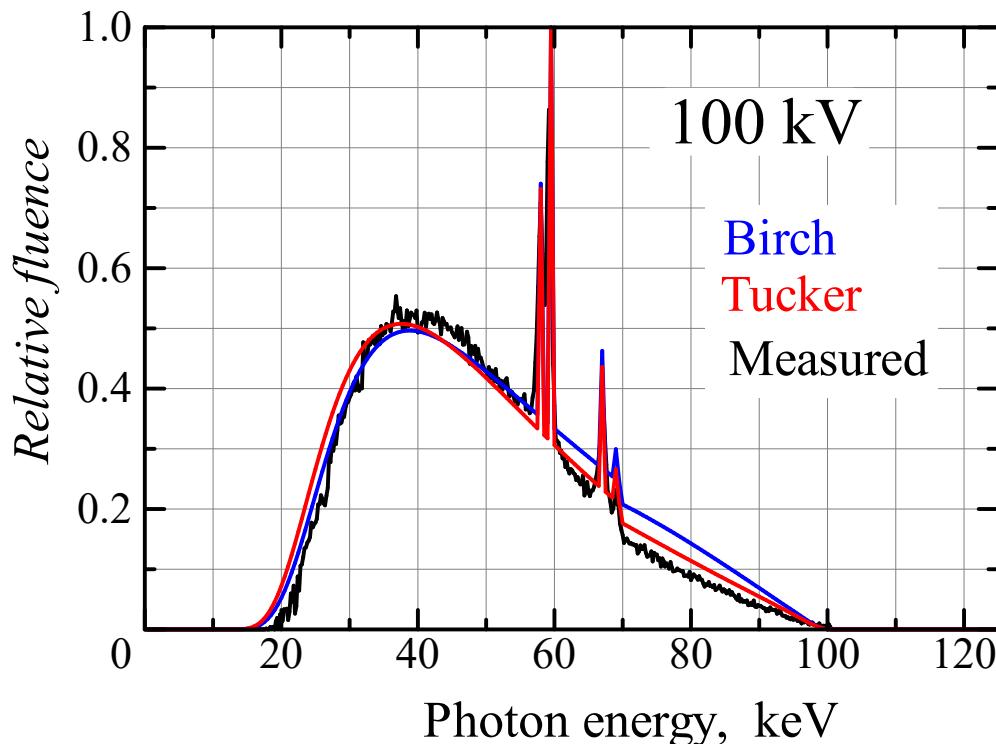
いずれの管電圧においても、Birch 式の方が Tucker 式で算出した値より若干大きな値となるが、その差異は小さい。

まとめ

以上、Birch 式、Tucker 式で計算した X 線スペクトルおよびそのスペクトルから計算される物理量データを比較してみたが、Birch 式による X 線スペクトルの方が Tucker 式による X 線スペクトルに比べ全体的に高エネルギー側へシフトしており、今回スペクトルデータから算出した物理量の差異も、その傾向に沿ったものとなっている。

X 線スペクトルデータをどういった目的に使用するかによって異なって来るが、例えば、被ばく線量、画像評価などの定量解析においては、今回示した物理量の差異はさほど問題にならないものと思われる。X 線スペクトルは、同じ照射条件であっても、製造メーカー、X 線管球の型式によっては多少の違いが生じるものと思われ、第 1 項(Birch 式、Tucker 式による X 線スペクトルの比較)で示した Birch 式と Tucker 式で計算されたスペクトルの差異は、特に問題にしなくてもよいと考える。

最後に、100 kV スペクトルについて Birch 式および Tucker 式で計算したスペクトルを、CdTe 半導体検出器を用いて実測したスペクトルと比較してみた(下図)。これを見ると、Birch 式の K 吸収端以上のエネルギー領域におけるスペクトルの“盛り上がり”が目立ち、Tucker 式の方が実測データにより近似しているように見える。ただし上述のとおり、管球の製造メーカーや型式、測定に使用する検出器、測定ジオメトリなどによって実測スペクトル自身も多少異なることが想定される。



なお、筆者個人的には主に Tucker 式を用いている。明確な根拠はない。

文献

- 1) BirchR and Marshall M. Computation of Bremsstrahlung X-ray Spectra and Comparison with Spectra Measured with a Ge(Li) Detector. *Phys. Med. Biol.* 24(3), 1979, 505-517.
- 2) Tucker D, Barnes GT, and Chakraborty DP. Semiempirical model for generating tungsten target x-ray spectra. *Med.Phys.* 18(2), 1991, 211-218.
- 3) 加藤秀起. 微分後方散乱係数を用いた診断X線の後方散乱係数算出法. *日放技学誌.* 57(12), 2001, 1503-1510.
- 4) 加藤秀起, 藤井茂久, 鈴木昇一. 診断X線の深部線量百分率算出法. *日放技学誌.* 60(8), 2004. 1107-1115.

(2026年1月)